Rapport de stage M1
Théorème de Hardy

2 septembre 2012

Anthony POELS

Maître de stage : Emmanuel Peyre
Dates du stage : du 14/05 au 22/06
Lieu du stage : UJF Grenoble

Introduction

La fonction zêta de Riemann est l'un des objets centraux de la théorie des nombres. L'un des enjeux majeurs de l'étude de cette fonction, et qu'incarne la célèbre hypothèse de Riemann, est de connaître la localisation de ses zéros non triviaux. Un lien étroit existe entre ce problème-ci et plusieurs conjectures ou théorèmes d'arithmétique. Ainsi, le théorème des nombres premiers, qui affirme que $\pi(x) = Li(x) + O\Big(xe^{-a\sqrt{\log(x)}}\Big)$ - où Li désigne le logarithme intégral, a est une constante positive, et la constante implicite est absolue - est équivalent au théorème : "La fonction ζ n'a pas de zéro sur la droite $\{\Re(z) = 1\}$" (voir [4] ou [9] pour une démonstration). Bien que le premier soit de nature purement arithmétique, les premières et les plus courtes démonstrations utilisent des outils d'analyse complexe et reposent sur une étude fine du comportement de ζ. D'autre part, l'hypothèse de Riemann permet d'améliorer le terme d'erreur et prouverait qu'on a $\pi(x) = Li(x) + O\Big(\sqrt{x}\log(x)\Big)$. Les zéros non triviaux de ζ sont tous dans la bande critique $\{0 \leq \Re(z) \leq 1\}$ et sont symétriques par rapport à l'axe des réels et par rapport à la droite critique $\{\Re(z) = 1/2\}$. L'hypothèse de Riemann, conjecturée en 1859, est l'un des problèmes de Hilbert non encore résolus. Elle affirme que "tous les zéros non triviaux de la fonction ζ sont sur la droite critique, i.e de partie réelle égale à 1/2". On notera $N(T)$ le nombre de zéros non triviaux de ζ de partie imaginaire comprise entre 0 et T et $N_0(T)$ le nombre de zéros de zêta de partie imaginaire comprise entre 0 et T et de partie réelle égale à 1/2. Le théorème de von Mangoldt[5] nous assure que lorsque T tend vers $+\infty$, $N(T) \sim \frac{1}{2\pi}T\log T$ (cf chap.IX de [9] pour une preuve de ce théorème). En 1914, Hardy prouva[2] :

Théorème de Hardy
La fonction ζ a une infinité de zéro sur la droite critique.

En 1921, il démontra avec Littlewood un énoncé plus précis :

Théorème
Il existe une constante absolue strictement positive A telle que pour tout réel positif T on ait

$$N_0(T) > AT.$$

Ces deux théorèmes constituent l'objet principal de ce stage. On trouvera plusieurs preuves de ces deux résultats dans le livre de Titchmarsh[9] ; celles présentées dans ce rapport en sont largement inspirées. Si le second théorème est plus précis que le théorème de Hardy, il ne permet pas en revanche de prouver qu'il y a une proportion positive de zéros sur la droite critique, compte tenu du comportement asymptotique de $N(T)$. Longtemps, ce fut toutefois le meilleur résultat connu. En 1942, Selberg réussit à prouver qu'on pouvait remplacer AT par $AT\log T$, la constante A étant très petite mais strictement positive, nous assurant qu'une proportion non nulle de zéros vérifiait l'hypothèse de Riemann. Aujourd'hui, les meilleurs résultats affirment qu'environ 40% des zéros non triviaux sont sur la droite critique (travaux de Conrey[1]). D'autre part, grâce à des méthodes de calculs efficaces, certains ont calculé effectivement le nombre de zéros sur la droite à hauteur fixée. Riemann fut le premier, en 1859. Il calcula et prouva que les 3 premiers zéros étaient sur la droite. En 1936, plus de 1000 zéros avaient été ainsi calculés (à la main !), et figuraient tous sur la droite critique. L'informatique et les méthodes de calculs évoluants, en 2004, on prouva que les 10^{13} premiers zéros de ζ vérifiaient l'hypothèse de Riemann.

1 Rappels

Dans tout ce rapport, $s = \sigma + it$ désignera un nombre complexe de partie réelle σ et de partie imaginaire t, sauf mention explicite du contraire. Fréquemment, A ou A' désignera une constante absolue strictement positive, indépendante des paramètres de notre problème sauf mention explicite du contraire. Cette constante ne sera pas nécessairement la même d'une ligne à l'autre, sans qu'on ne le précise nécessairement s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

1.1 Définitions de diverses fonctions

Définition de Γ

La fonction gamma d'Euler Γ peut se définir par la formule

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

L'intégrale de droite est bien définie pour $\sigma > 0$ et la fonction obtenue est analytique sur cette même région. On peut alors montrer que Γ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. Un entier négatif $-n$ sera un pôle simple de résidu $(-1)^n/n!$. Enfin, signalons que Γ ne possède aucun zéro (on peut utiliser la formule des compléments pour justifier cette affirmation)

Définition de ζ

La fonction zêta de Riemann ζ peut se définir par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette série de Dirichlet est convergente et définit une fonction analytique sur le demi-plan $\{\sigma > 1\}$.

On peut alors montrer qu'elle admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

Définition de ξ

La fonction ξ peut se définir par la formule

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s).$$

ξ est alors une fonction entière. Cela provient directement de son équation fonctionnelle (cf plus bas) et du fait que 1 soit un pôle simple de ζ, compensé par le terme $s - 1$.

Définition de Ξ

Il est commode de définir la fonction Ξ par

$$\Xi(z) = \xi\big(\frac{1}{2} + iz\big) \qquad z \in \mathbb{C}.$$

L'intérêt de cette définition apparaîtra dans la suite. On peut déjà remarquer que pour z réel, $1/2 + iz$ parcourt la droite critique.

Définition de ψ
On peut définir la fonction ψ par la formule

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}.$$

Cette série définit une fonction analytique sur le demi-plan $\{\Re(x) > 0\}$. On peut remarquer que lorsque x tend vers $+\infty$ par valeurs réelles, $\psi(x)$ converge vers 0 plus vite que n'importe quelle puissance de x.

1.2 Propriétés de base et équations fonctionnelles

Les fonctions définies précédemment vérifient toutes une ou plusieurs équations fonctionnelles, souvent utiles pour les calculs.

Equation fonctionnelle (de Γ)
Sans doute la plus simple à prouver, l'équation fonctionnelle de la fonction gamma s'écrit

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

valable pour tout nombre complexe s qui n'est pas un entier négatif. On peut s'en servir pour prolonger analytiquement Γ et pour calculer son résidu en ses pôles.

Equation fonctionnelle (de ψ)
L'équation de ψ, valable sur son ensemble de définition, affirme que

$$1 + 2\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(1 + 2\psi\big(\frac{1}{x}\big)\Big) \tag{1}$$

où $\sqrt{x} = e^{1/2\log x}$ avec $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta, \ \ -\pi < \theta < \pi$.
En particulier, ceci nous donne directement que $\psi(x) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0.

Preuve
Ceci découle de l'équation modulaire pour la fonction θ de Jacobi.

Equation fonctionnelle (de ζ)
L'équation fonctionnelle de ζ peut se formuler comme suit :

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\big(\frac{\pi s}{2}\big)\Gamma(s)\zeta(s)$$

valable sur $\mathbb{C}^*$. Une formulation équivalente justifiant directement la définition de ξ est

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s). \tag{2}$$

Preuve
On trouvera plus d'une demi-douzaine de preuve de ce résultat dans [9].

$\square$

Equation fonctionnelle (de ξ et Ξ)
Les équations fonctionnelles de ξ et Ξ découlent directement de (2). *On a*

$$\xi(1-s) = \xi(s) \qquad \text{et} \qquad \Xi(z) = \Xi(-z). \tag{3}$$

Comme ce sont deux fonctions entières, (3) *est valable sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

La propriété suivante affirme que $\Xi(t)$ est réel lorsque t est réel. En particulier, comme Ξ est une fonction continue, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour localiser certains de ses zéros, qui correspondront à des zéros de ζ sur la droite critique. Au delà de cet aspect intéressant, on sera amener à intégrer Ξ sur une partie de $\mathbb{R}$, et savoir que l'intégrale est réelle sera essentiel pour notre raisonnement.

Proposition 1.1
Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Xi(t) \in \mathbb{R}.$$

Preuve
Si s est un réel strictement plus grand que 1, alors $\xi(s)$ est réel (cf la définition de ξ). En particulier, $\overline{\xi(\overline{s})} = \xi(s)$ pour s réel > 1. Par prolongement analytique, cette identité est vérifiée sur $\mathbb{C}$ tout entier.
Si t est réel, on a alors

$$\xi(\frac{1}{2} - it) = \overline{\xi(\frac{1}{2} + it)},$$

et en utilisant (3) (l'équation fonctionnelle de ξ) et la définition de Ξ, on trouve

$$\Xi(t) = \overline{\Xi(t)}.$$

□

1.3 Estimations analytiques basiques

La preuve du théorème de Hardy repose sur l'étude d'intégrales pour lesquelles les intégrandes dépendent des fonctions introduites précédemment. Pour savoir quand de telles intégrales existent et pouvoir les étudier correctement, il faut donc connaître le comportement asymptotique des fonctions intégrées. C'est le but des propositions suivantes.

Proposition 1.2 (Ordre de grandeur de ζ sur la droite critique)
Si $\sigma = 1/2$, alors on a

$$|\zeta(s)| = O(t)$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Cette estimation se prouve aisément en montrant la formule suivante pour $s \neq 1$:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \qquad \sigma > 0 \tag{4}$$

qui démontre en outre que le $O(t)$ est uniforme en σ sur toute région de type $\{\sigma \geq \sigma_0 > 0,\ t \geq \delta\}$ avec $\delta > 0$.

(4) est une conséquente immédiate de la proposition 1.5 utilisée avec $X = 1$.

Proposition 1.3 (Ordre de grandeur de Γ - formule de Stirling)

Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$. On a alors :

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log(z) - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \int_0^{+\infty} \frac{B_1^*(t)}{z+t} dt$$

où $B_1^*(t) = t - \lfloor t \rfloor - 1/2$, et où le logarithme complexe est défini par $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ avec $-\pi < \theta < \pi$.
Il se trouve que

$$\int_0^{+\infty} \frac{B_1^*(t)}{z+t} dt = O\Big(\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + |z|^2 - 2t|z|\cos(\delta)}\Big) = O\Big(\frac{1}{|z|}\Big)$$

uniformément sur $\{-\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi + \delta\}$, lorsque $|z|$ tend vers l'infini ($\delta > 0$). On en déduit que

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \log(z) - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\Big(\frac{1}{|z|}\Big)$$

lorsque $|z|$ tend vers l'infini, pour $-\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi + \delta$.
De cette dernière formule on tire enfin l'équivalent suivant, valable uniformément en σ sur toute bande du type $\{A \leq \sigma \leq B\}$, lorsque $|s|$ tend vers l'infini

$$|\Gamma(s)| \sim \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-1/2}e^{-\pi|t|/2}. \tag{5}$$

Preuve
On trouvera une démonstration de ces résultats dans [8] chapitre IV (4.41 et 4.42).

□

Proposition 1.4 (Ordre de grandeur de Ξ sur la droite critique)
Utilisant la définition de Ξ et les ordres de grandeur précédemment établis pour Γ et ζ, on trouve

$$\Xi(t) = O\big(t^3 e^{-\frac{\pi}{4}t}\big)$$

pour t réel, tendant vers $+\infty$.

Preuve
Par définition, on a

$$\Xi(t) = -\frac{1}{2}\big(t^2 + \frac{1}{4}\big)\pi^{-\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}}\Gamma\big(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\big)\zeta\big(\frac{1}{2} + it\big).$$

$$\text{Or} \quad \Gamma\big(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\big) = O\big(t^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi\frac{t}{4}}\big) = O\big(e^{-\pi\frac{t}{4}}\big) \qquad \text{et} \quad \zeta\big(\frac{1}{2} + it\big) = O\big(t\big)$$

par (5) et (4), ce qui conclut.

□

Les deux propositions et les deux lemmes qui suivent serviront principalement à démontrer une propriété importante qui ne servira pas pour le théorème de Hardy lui-même, mais uniquement pour le théorème 2, il s'agit de la proposition 1.7. Le lemme 1 servira également une autre fois pour dans la démonstration du théorème 2.

Proposition 1.5
Soit $s \neq 1$ un nombre complexe de partie réelle $\sigma > 0$ et $X > 0$ un réel. Alors on a

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq X}\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)X^{s-1}} + \frac{\{X\}}{X^s} - \frac{1}{2X^s} - s\int_X^{+\infty}\frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}} \tag{6}$$

où $B_1^*(x) = x - \lfloor x\rfloor - 1/2$ et où $\{X\}$ désigne la partie fractionnaire de X.

Preuve
Soit $X > 0$. Par prolongement analytique, il suffit de montrer (6) pour s de partie réelle strictement plus grande que 1, puisque les deux membres de cette égalité sont holomorphes sur $\{\sigma > 0\}\backslash\{1\}$. On a alors

$$
\begin{aligned}
-s\int_X^{+\infty}\frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}} &= -s\int_X^{\lfloor X\rfloor+1}\frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}}+\sum_{n\geq\lfloor X\rfloor+1}-s\int_n^{n+1}\frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}}\\
&=\left(\left[\frac{B_1^*(x)}{x^s}\right]_X^{\to\lfloor X\rfloor+1}-\int_X^{\lfloor X\rfloor+1}\frac{dx}{x^s}\right)+\sum_{n\geq\lfloor X\rfloor+1}\left(\left[\frac{B_1^*(x)}{x^s}\right]_n^{\to n+1}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s}\right)\\
&=\frac{1}{2\big(\lfloor X\rfloor+1\big)^s}-\frac{\{X\}-\frac{1}{2}}{X^s}-\int_X^{+\infty}\frac{dx}{x^s}+\sum_{n\geq\lfloor X\rfloor+1}\big(\frac{1}{2(n+1)^s}+\frac{1}{2n^s}\big)\\
&=-\frac{\{X\}}{X^s}+\frac{1}{2X^s}-\frac{1}{(s-1)X^{s-1}}+\sum_{n\geq\lfloor X\rfloor+1}\frac{1}{n^s}\\
&=-\frac{\{X\}}{X^s}+\frac{1}{2X^s}-\frac{1}{(s-1)X^{s-1}}+\zeta(s)-\sum_{n\leq X}\frac{1}{n^s}
\end{aligned}
$$

□

La proposition qui suit énonce un résultat classique et général sur les intégrales. Il permet entre autre - et c'est ce qui nous intéresse ici et qu'expose le lemme présenté juste après - de fournir des estimations intéressantes pour certains types d'intégrales. On ne s'en servira pas avant la preuve du théorème 2.

Proposition 1.6 (second théorème de la valeur moyenne)
Soit f et ϕ deux fonctions définies sur $]a,b[$ telles que f soit intégrable et ϕ bornée. $\phi(a+0)$ (resp. $\phi(b-0)$) désignera la limite de $\phi(t)$ lorsque t tend vers a (resp. lorsque t tend vers b), ce qui existe dès que ϕ est monotone.

Si ϕ est positive et décroissante, alors il existe un nombre ξ compris entre a et b tel que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=\phi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx.$$

Si ϕ est positive et croissante, alors il existe un nombre ξ compris entre a et b tel que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=\phi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Si ϕ est une fonction monotone (sans hypothèse supplémentaire sur son signe), alors il existe un nombre ξ compris entre a et b tel que

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx=\phi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx+\phi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Preuve
Cf chapitre XII de [8] pour une preuve de ce théorème.

Lemme 1
Soit F et G deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $[a,b]$, telles que F soit dérivable, G/F' monotone et qu'il existe une constante m telle que l'on ait $F'/G\geq m>0$ ou $F'/G\leq -m<0$ sur $[a,b]$. Alors

$$\left|\int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx\right|\leq\frac{4}{m}.$$

Preuve
Quitte à changer G en $-G$, on peut supposer $F'/G > 0$.
Supposons G/F' décroissante. Par le théorème 1.6, il existe ξ compris entre a et b tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b G(x)\cos(F(x))dx &= \int_a^b \frac{G(x)}{F'(x)} F'(x)\cos(F(x))dx \\ &= \frac{G(a+0)}{F'(a)} \int_a^{\xi} F'(x)\cos(F(x))dx \\ &= \frac{G(a+0)}{F'(a)} \Big[\sin(F(\xi)) - \sin(F(a))\Big].\end{aligned}$$

On a donc clairement

$$\left|\int_a^b G(x)\cos(F(x))dx\right| \leq \frac{2}{m}.$$

On obtient la même inégalité avec la partie imaginaire, et le résultat en découle. Par ailleurs, le même type de preuve marche toujours en supposant G/F' croissante (en utilisant la version du second théorème de la valeur moyenne qui correspond).

□

Lemme 2
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors

$$B_1^*(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

D'autre part, en notant

$$S_N(x) := -\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}$$

la N-ème somme partielle de ce développement ($N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$), il existe une constante absolue $M > 0$ telle que pour tout $N \geq 1$ et pour tout x réel, on ait

$$|S_N(x)| \leq M.$$

Preuve
On développe en série de Fourier la fonction $1-$périodique $t \mapsto B_1^*(t)$, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, et on trouve la première partie du lemme.

Soit $0 < x < \frac{1}{2}$ un réel et $N \geq 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}x - S_N(x) = x + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n} &= \int_0^x \Big(1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos(2\pi n t)\Big)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{2i\pi n t}\Big)dt \\ &= \int_0^x \frac{e^{(2N+1)i\pi t} - e^{-(2N+1)i\pi t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}dt = \int_0^x \frac{\sin\big((2N+1)\pi t\big)}{\sin(\pi t)}dt \\ &= \int_0^x \frac{\sin\big((2N+1)\pi t\big)}{\pi t}dt + \int_0^x \Big(\frac{1}{\sin(\pi t)} - \frac{1}{\pi t}\Big)\sin\big((2N+1)\pi t\big)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi x} \frac{\sin(u)}{u}du + \int_0^x f(t)\sin\big((2N+1)\pi t\big)dt \qquad (7)\end{aligned}$$

où $f(t) = 1/(\sin(\pi t) - 1/(\pi t)$ est analytique sur le disque $|t| < 1$, donc bornée sur $|t| \leq \frac{1}{2}$. La deuxième intégrale de (7) est donc bornée uniformément en N. Il en va de même pour la

première intégrale de (7), puisqu'il est aisé de voir en étudiant ses variations que la fonction $h \mapsto \int_0^h u^{-1}\sin(u)du$ est bornée (maximale en $h = \pi$).
Il existe donc M' indépendant de N tel que pour tout $0 < x < \frac{1}{2}$ on ait $|x - S_N(x)| \leq M'$. Or, comme $x - S_N(x)$ est impaire et que $S_N(\frac{1}{2} = S_N(0) = 0$, cette majoration vaut pour tout $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. La périodicité des S_N nous permet de conclure.

$\square$

Proposition 1.7
Soit $\epsilon > 0$ et $0 < \sigma_0 < 1$. Alors il existe une constante positive A telle que pour tout tout $t \geq 1$, pour tout $X \geq t/(2\pi) + \epsilon$ et pour tout $1 \geq \sigma \geq \sigma_0$, on ait

$$|\zeta(s) - \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s}| \leq +A\Big(X^{-\sigma} + t^{-1}X^{1-\sigma} + tX^{-\sigma-1}\Big).$$

En particulier, ce lemme appliqué à $1 \geq \sigma \geq \sigma_0$ et $\frac{t}{2\pi} + \epsilon \leq X \leq A't$ donne ($t \geq 1$)

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + O\big(t^{-\sigma}\big) \tag{8}$$

uniformément sur cette région .

Preuve

Soit $\epsilon > 0$ et $1 > \sigma_0 > 0$.
Soit $1 \geq \sigma \geq \sigma_0$, $t \geq 1$ et $X \geq t/(2\pi) + \epsilon$. On part de la formule (6) :

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)X^{s-1}} + \frac{\{X\}}{X^s} - \frac{1}{2X^s} - s\int_X^{+\infty} \frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}}.$$

Le terme $\{X\}/X^s - 1/(2X^s)$ est $O\big(X^{-\sigma}\big)$, où la constante imlicite est absolue, et le terme $X^{1-s}/(s-1)$ est $O\big(t^{-1}X^{1-\sigma}\big)$ uniformément en σ, X et pour $t \geq 1$.
Comme $|s| = O(t)$ uniformément en $X \geq 0$, $1 \geq \sigma \geq \sigma_0$ et $t \geq 1$, il reste donc à prouver - et c'est toute la partie délicate de cette estimation - que

$$\int_X^{+\infty} \frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}} = O\big(X^{-\sigma-1}\big)$$

uniformément sur la région considérée.

En développant $B_1^*(x)$ à l'aide du lemme 2, on trouve

$$\int_X^{+\infty} \frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}} = -\int_X^{+\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi nx)dx}{\pi n x^{s+1}}.$$

Or par la seconde partie du lemme 2 on peut dominer les $x \mapsto \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n x^{s+1}}$ par la fonction intégrable $x \mapsto A/x^{\sigma_0+1}$, où la constante A est absolue. Par convergence dominée, on peut donc licitement intervertir le signe somme et intégrale, et finalement

$$\int_X^{+\infty} \frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}} = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi n} \int_X^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)dx}{x^{s+1}}.$$

Soit $n \geq 1$ un entier. On a

$$\frac{1}{\pi n}\int_X^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)dx}{x^{s+1}} = \frac{1}{2i\pi n}\Big(\int_X^{+\infty} \frac{e^{iw(x)}dx}{x^{\sigma+1}} - \int_X^{+\infty} \frac{e^{-iv(x)}dx}{x^{\sigma+1}}\Big)$$

en développant le sinus et en définissant pour $x > 0$ les fonctions w et v par $w(x) = 2\pi nx - t\log(x)$ et $v(x) = 2\pi nx + t\log(x)$.

L'hypothèse $X \geq t/(2\pi) + \epsilon$ nous assure que quel que soit l'entier n considéré, la fonction $x \mapsto x^{\sigma+1} w'(x) = x^{\sigma+1}\big(2\pi n - \frac{t}{x}\big)$ est croissante et positive, minorée par $X^{\sigma+1}\big(2\pi n - \frac{t}{X}\big)$, et la fonction $x \mapsto x^{\sigma+1}(-v)'(x) = -x^{\sigma+1}\big(2\pi n + \frac{t}{x}\big)$ est décroissante et négative, majorée par $-X^{\sigma+1}\big(2\pi n + \frac{t}{X}\big)$.
D'après le lemme 1 on a donc

$$\Big| \int_X^{+\infty} \frac{e^{iw(x)}dx}{x^{\sigma+1}} \Big| \leq \frac{4}{X^{\sigma+1}\big(2\pi n - \frac{t}{n}\big)} = O\Big(\frac{1}{nX^{\sigma+1}}\Big),$$

et

$$\Big| \int_X^{+\infty} \frac{e^{-iv(x)}dx}{x^{\sigma+1}} \Big| \leq \frac{4}{X^{\sigma+1}\big(2\pi n + \frac{t}{n}\big)} = O\Big(\frac{1}{nX^{\sigma+1}}\Big)$$

où les constantes implicites sont absolues (sous l'hypothèse $X \geq \frac{t}{2\pi} + \epsilon$).

Cela démontre finalement que

$$\frac{1}{\pi n} \int_X^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n x)dx}{x^{s+1}} = O\Big(\frac{1}{n^2 X^{\sigma+1}}\Big)$$

uniformément en n et $X \geq \frac{t}{2\pi} + \epsilon$.
En sommant terme à terme, on vient ainsi de prouver ce qu'on cherchait, à savoir

$$\int_X^{+\infty} \frac{B_1^*(x)dx}{x^{s+1}} = O(X^{-\sigma-1})$$

uniformément sur la région $\{1 \geq \sigma \geq \sigma_0, t \geq 1\}$ et pour tout $X \geq \frac{t}{2\pi} + \epsilon$.
Ceci achève la démonstration de cette proposition.

Remarque : Edwards présente dans son livre[3] (Chapitre 9, section 9.7) une démonstration plus longue de ce résultat mais n'utilisant pas le second théorème de la valeur moyenne, que nous avons admis ici.

On pourra également trouver de bien meilleures estimations pour le module de zeta sur la droite critique dans le livre de Tenenbaum[6], Chapitres I.6 et II.3.

□

La proposition qui suit est un cas particulier de l'inversion de Mellin (cf [7] et [8] pour les détails et preuves relatifs à cette transformée). Formellement, sans préciser les hypothèses de convergence, la formule de Mellin relie deux fonctions f et $\mathfrak{F}$ par les relations :

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathfrak{F}(s)x^{-s}ds$$

où la variable $s = \sigma + it$ est complexe, et x est réelle.
La validité de telles égalités dépend évidemment des caractéristiques de f et de $\mathfrak{F}$. La transformée de Mellin se ramène en fait à une transformée de Fourier, en effectuant le changement de variable $x = e^y$. En particulier, on voit que si $\mathfrak{F}$ est bien définie à σ fixé (vrai dès que $x \mapsto x^{\sigma-1}f(x)$ est intégrable) et si $u \mapsto \mathfrak{F}(\sigma + iu)$ est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$, alors l'inversion de Mellin est valable.

Le premier exemple s'obtient avec $f(x) = e^{-x}$ et $\mathfrak{F}(s) = \Gamma(s)$. D'où :

Proposition 1.8
Soit $s = \sigma + it$ un nombre complexe tel que $\sigma > 0$. Alors pour tout réel strictement positif x, on a :

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds \tag{9}$$

2 Théorème de Hardy

Le théorème de Hardy repose sur l'étude fine de l'intégrale figurant dans la proposition suivante, qui établit une identité très utile pour la suite.

Proposition 2.1
Soit x un nombre complexe tel que $|Im\ x| < \pi/4$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} \cos(xt)\, dt = \frac{\pi}{2} \Big(e^{x/2} - 2e^{-x/2} \psi(e^{-2x}) \Big). \tag{10}$$

D'autre part, l'intégrale de gauche vue comme fonction de x définit une fonction holomorphe sur la région précédente et l'on peut dériver sous le signe intégrale.

Preuve
Soit $u \in \mathbb{R}^*$. Posons

$$\phi(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}.$$

Alors la fonction $t \mapsto |\phi(it)|^2 \Xi(t) \cos(ut)$ est intégrable, d'après la proposition 1.4. Notons

$$\Phi(u) = \int_0^{+\infty} |\phi(it)|^2 \Xi(t) \cos(ut)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} \cos(ut)\, dt$$

Posons $y = e^u$. Par parité de $t \mapsto |\phi(it)|^2 \Xi(t)$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\phi(it)|^2 \Xi(t) y^{it} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(it)\phi(-it)\xi(\frac{1}{2} + it) y^{it} dt \\
&\overset{s=1/2+it}{=} \frac{1}{2i\sqrt{y}} \int_D \phi(s - \frac{1}{2})\phi(\frac{1}{2} - s)\xi(s) y^s ds \\
&= \frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_D \phi(s - \frac{1}{2})\phi(\frac{1}{2} - s) s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) y^s ds \\
&= -\frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_D \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) y^s ds \\
&\overset{(4)}{=} -\frac{1}{4i\sqrt{y}} \int_D \left(\int_{\mathbb{R}^+} s\Gamma(\frac{s}{2}) \Big(\frac{y}{x\sqrt{\pi}}\Big)^s \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x} dx \right) ds
\end{aligned}$$

où D désigne la droite verticale $\{\Re(z) = 1/2\}$.
Or, (5) nous assure que

$$\int_D \left(\int_{\mathbb{R}^+} \left| s\Gamma(\frac{s}{2}) \Big(\frac{y}{x\sqrt{\pi}}\Big)^s \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x} \right| dx \right) ds = \Big(\frac{y}{\sqrt{\pi}}\Big)^{1/2} \int_0^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x^{3/2}} dx \int_D \left| s\Gamma(\frac{s}{2}) \right| ds < \infty.$$

On peut donc intervertir les intégrales, et on trouve

$$
\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{y}}{\pi}\Phi(u) &= \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\lfloor x\rfloor - x}{x}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_D \Gamma(\frac{s}{2}+1)\Big(\frac{x\sqrt{\pi}}{y}\Big)^{-s}ds\right)dx \\
&\overset{z=1+s/2}{=} \int_{\mathbb{R}^+}(\lfloor x\rfloor - x)\times 2\frac{\pi}{y^2}x\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{D'}\Gamma(z)\Big(\frac{\pi x^2}{y^2}\Big)^{-z}dz\right)dx \\
&\overset{(9)}{=} \int_{\mathbb{R}^+}(\lfloor x\rfloor - x)\times 2\frac{\pi}{y^2}xe^{-\pi x^2/y^2}dx
\end{aligned}
$$

où D' désigne la droite verticale $\{\Re(z)=1/4\}$. Maintenant, notant

$$f(x) = e^{-\pi x^2/y^2}$$

on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{y}}{\pi}\Phi(u) &= \int_{\mathbb{R}^+}(x-\lfloor x\rfloor)f'(x)dx \\
&= \sum_{n\geq 0}\int_n^{n+1}(x-\lfloor x\rfloor)f'(x)dx \\
&= \sum_{n\geq 0}\Big[(x-\lfloor x\rfloor)f(x)\Big]_n^{\to n+1} - \int_n^{n+1}f(x)dx \\
&= \sum_{n\geq 1}e^{-\pi n^2\frac{1}{y^2}} - \int_{\mathbb{R}^+}e^{-\pi x^2/y^2}dx \\
&= \psi(\frac{1}{y^2}) - \frac{y}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

On vient de prouver (10) pour u réel non nul, puisque $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ et $y=e^u$.

Maintenant, si x est un nombre complexe de partie imaginaire comprise entre $-\pi/4+\delta$ et $\pi/4-\delta$, où $\delta>0$, alors $t\mapsto \Xi(t)/(t^2+\frac{1}{4})\cos xt$ est dominée par $t\mapsto|\Xi(t)|e^{(\pi/4-\delta)t}$, qui est intégrable d'après la proposition 1.4. Donc le membre de gauche de (10) est une fonction holomorphe sur le domaine $\{|\mathrm{Im}\ x|<\pi/4\}$ et l'égalité reste vraie sur cet ensemble par prolongement analytique.

Enfin, on peut dériver sous le signe intégrale autant de fois qu'on le désire car $t\to t^n|\Xi(t)|e^{(\pi/4-\delta)t}$ domine la dérivée $n-$ème de l'intégrande selon x (si $|\mathrm{Im}\ x|<\pi/4-\delta$) et est toujours intégrable.

□

Théorème 1 (de Hardy)
La fonction ζ a une infinité de zéro sur la droite critique.

Preuve
Rappelons que par définition de Ξ, on a

$$\Xi(t) = -\frac{1}{2}(t^2+\frac{1}{4})\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}it}\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)\zeta(\frac{1}{2}+it)$$

et Ξ est une fonction holomorphe à valeurs réelles pour t réel (proposition 1.1). Comme Γ ne s'annule pas, un zéro de ζ sur la droite critique $\{\Re(z)=1/2\}$ correspond à un zéro réel de Ξ. Le théorème de Hardy revient donc à prouver que Ξ a une infinité de zéros réels.

En évaluant (10) en $x=i\alpha$, on a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac14}\cosh(\alpha t)dt = 2\cos\left(\frac12\alpha\right) - 2e^{\frac12 i\alpha}\Big(\frac12+\psi\big(e^{2i\alpha}\big)\Big) \tag{11}$$

où α est un nombre positif réel inférieur strictement à $\frac{\pi}{4}$. On peut alors dériver sous le signe intégrale d'après la proposition 2.1 et on obtient en dérivant $2n$ fois

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac14}t^{2n}\cosh(\alpha t)\,dt = \frac{(-1)^n\cos\left(\frac12\alpha\right)}{2^{2n-1}} - 2\Big(\frac{d}{d\alpha}\Big)^{2n}\Big[e^{\frac12 i\alpha}\Big(\frac12+\psi\big(e^{2i\alpha}\big)\Big)\Big]. \tag{12}$$

Prouvons maintenant que le dernier terme du membre de droite de (12) tend vers zéro (à n fixé) lorsque α tend vers $\frac{\pi}{4}^-$. Pour cela, il suffit de prouver que la fonction $x\mapsto 1/2+\psi(x)$ et ses dérivées successives tendent vers 0 lorsque x tend vers i dans le demi-plan $\{\Re(z)>0\}$.

Soit δ un nombre complexe tel que $\Re(\delta)>0$.

$$\begin{aligned}\psi(i+\delta) &= \sum_{n\geq1} e^{-n^2\pi(i+\delta)} = \sum_{n\geq1}(-1)^n e^{-n^2\pi\delta}\\ &= 2\sum_{n\geq1} e^{-(2n)^2\pi\delta} - \sum_{n\geq1} e^{-n^2\pi\delta}\\ &= 2\psi(4\delta)-\psi(\delta)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\psi\big(\frac{1}{4\delta}\big) - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\psi\big(\frac{1}{\delta}\big) - \frac12,\end{aligned}$$

où l'on applique (1) pour obtenir la dernière égalité.
Or, $\psi(x)$ décroît vers 0 plus vite que n'importe quelle puissance de x, lorsque $\Re(x)$ tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\delta\mapsto\frac12+\psi(i+\delta) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\psi\big(\frac{1}{4\delta}\big) - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\psi\big(\frac{1}{\delta}\big)$$

et ses dérivées successives tendent vers 0 lorsque δ tend vers 0 ($\Re(\delta)>0$). On en déduit que $x\mapsto 1/2+\psi(x)$ et ses dérivées successives tendent vers 0 lorsque x tend vers i ($\Re(x)>0$).

On a ainsi obtenu, pour tout entier n,

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^-}\int_0^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac14}t^{2n}\cosh(\alpha t)\,dt = \frac{(-1)^n\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2^{2n}}. \tag{13}$$

Afin d'aboutir à une contradiction, supposons que Ξ n'ait qu'un nombre fini de zéros réels. Alors comme Ξ est continue et à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$, nécessairement $\Xi(t)$ sera de signe constant pour t assez grand. Quitte à changer Ξ en $-\Xi$, ce qui ne change rien au raisonnement qui suit, on peut supposer $\Xi(t)$ strictement positif pour $t\geq T$.

Par une variante du théorème de convergence monotone (ici on ne peut pas utiliser un argument type convergence dominée, l'hypothèse de domination faisant défaut), on déduit :

$$\int_T^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac14}t^{2n}\cosh\big(\frac{\pi}{4}t\big)\,dt = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^-}\int_T^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac14}t^{2n}\cosh\big(\alpha t\big)\,dt,$$

puis

$$\int_0^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac14}t^{2n}\cosh\big(\frac{\pi}{4}t\big)\,dt = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^-}\int_0^{+\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac14}t^{2n}\cosh\big(\alpha t\big)\,dt = \frac{(-1)^n\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2^{2n}}. \tag{14}$$

En prenant n impair, le membre de droite de (14) est négatif, d'où

$$\int_T^{+\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\left(\frac{\pi}{4}t\right)\, dt < -\int_0^T \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\left(\frac{\pi}{4}t\right)\, dt \leq KT^{2n} \tag{15}$$

où on a posé

$$K = \int_0^T \left| \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} \cosh\left(\frac{\pi}{4}t\right) \right|,$$

constante positive indépendante de n. Or, par hypothèse sur Ξ, il existe une constante strictement positive m (dépendante de T, indépendante de n) minorant $\Xi(t)/(t^2+\frac{1}{4})\cosh(\frac{\pi}{4}t)$ sur le segment $[2T, 2T+1]$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_T^{+\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\left(\frac{\pi}{4}t\right)\, dt &\geq \int_{2T}^{2T+1} \frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{4}} t^{2n} \cosh\left(\frac{\pi}{4}t\right)\, dt \\ &\geq \int_{2T}^{2T+1} m t^{2n}\, dt \geq m(2T)^{2n}. \end{aligned} \tag{16}$$

Finalement, combinant les deux inégalités (15) et (16), on trouve

$$m2^{2n} < K$$

ce qui est faux pour n assez grand : contradiction. Ceci achève la démonstration du théorème de Hardy.

□

On vient donc de prouver que ζ a une infinité de zéros sur la droite critique. Cependant, le théorème de Hardy ne donne aucun résultat concernant la proportion du nombre de zéro sur cette droite.

Definition 1
Nous noterons $N(T)$ le nombre de zéros de la fonction ζ dans la bande critique et de partie imaginaire comprise entre 0 et T.
$N_0(T)$ désignera alors le nombre de zéros de la forme $\frac{1}{2}+it$ $(0 \leq t \leq T)$.

Le théorème de Hardy nous assure que $N_0(T)$ tend vers $+\infty$ lorsque T tend vers $+\infty$. On peut néanmoins quantifier ce résultat de manière plus précise. C'est le but du théorème principal de la section suivante.

3 Un théorème plus précis : $N_0(T) > AT$

Théorème 2
Il existe une constante absolue strictement positive A telle que pour tout réel positif T on ait

$$N_0(T) > AT.$$

Remarquons que ce théorème n'est pas assez puissant pour démontrer qu'il y a une proportion non nulle de zéros sur la droite critique, puisque l'on sait que $N(T) \sim \frac{1}{2\pi}T\log T$ (cf [5] et [9]).

Preuve
La preuve de ce théorème repose sur un lemme-clef : le lemme 5. Sa démonstration nécessite l'utilisation de deux autres lemmes (lemmes 3 et 4). Leur énoncé est donné cidessous, mais leur démonstration - longue et fastidieuse - sera reportée à la section suivante.

Pour $T,\ H > 0$ (on fixera H assez grand à la fin de la démonstration et on fera tendre T vers $+\infty$) et $T \leq t \leq 2T$, on définit deux intégrales $I = I(T,t,H)$ et $J = J(T,t,H)$ par

$$I = \int_t^{t+H} \Xi(u) \frac{e^{\frac{\pi}{4}u}}{u^2+\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{T}} du, \qquad J = \int_t^{t+H} \left|\Xi(u)\right| \frac{e^{\frac{\pi}{4}u}}{u^2+\frac{1}{4}} e^{-\frac{u}{T}} du.$$

On définit aussi S comme étant l'ensemble des t compris entre T et $2T$ tels que $|I(t)| = J(t)$. $m(S)$ désignera alors la mesure de Lebesgue de S.

On peut déjà remarquer que $|I(t)| = J(t)$ si et seulement si Ξ est de signe constant sur $]t, t+H[$. En particulier, si $|I(t)| \neq J(t)$, c'est que Ξ possède au moins un zéro dans l'intervalle précédent.
Par la suite, on essaiera de majorer $m(S)$. C'est l'objet de notre lemme-clef.

Lemme 3
Il existe des constantes absolues M et $A > 0$ telle que pour tout $H \geq M$, il existe une constante $T_0(H) > 0$ dépendante de H telle que pour tout $T \geq T_0(T)$ on ait

$$\int_T^{2T} |I|^2 dt \leq AHT^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve
Cf section 4 □

Lemme 4
Il existe une fonction Ψ de la variable t (dépendante de H et T) et une constante absolue A telles que l'on ait

$$J > (AH + \Psi)T^{-\frac{1}{4}} \tag{17}$$

avec

$$\int_T^{2T} \left|\Psi\right|^2 dt = O(T) \quad \textit{lorsque } T \to +\infty \quad (0 < H^2 < T) \tag{18}$$

Preuve
Cf section 4 □

Lemme 5
Il existe une constante aboslue positive A et une constante $T_0(H)$ dépendante de H telles que pour H assez grand et pour $T \geq T_0(H)$, on ait :

$$m(S) < ATH^{-\frac{1}{2}}.$$

Preuve
Par définition de S, on a

$$\int_S |I| dt = \int_S J dt.$$

Maintenant, on a pour H assez grand et $T \geq T_0(H)$, constante positive dépendante de H (il n'est pas besoin de la préciser, elle est suffisamment grande pour que les lemmes 3 et 4 soient valables)

$$\int_S |I| dt \leq \int_T^{2T} |I| dt \overset{Schwarz}{\leq} \left(T \int_T^{2T} |I|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < AH^{\frac{1}{2}}T^{\frac{3}{4}} \tag{19}$$

où A est une constante indépendante de H et T et où la dernière inégalité est obtenue en appliquant le lemme 3. D'autre part

$$
\begin{aligned}
\int_S J dt &> T^{-\frac{1}{4}} \int_S \big(AH + \Psi\big) dt && (20)\\
&> AT^{-\frac{1}{4}} H m(S) - T^{-\frac{1}{4}} \int_T^{2T} |\Psi| dt \\
&> AT^{-\frac{1}{4}} H m(S) - T^{-\frac{1}{4}} \left(T \int_T^{2T} |\Psi|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} && (21)\\
&> AT^{-\frac{1}{4}} H m(S) - A' T^{\frac{3}{4}} && (22)
\end{aligned}
$$

où A' est une constante absolue indépendante de T et H, (21) provient de l'inégalité de Schwarz, (20) et (22) sont obtenus en appliquant respectivement (17) et (18) du lemme 4. Finalement, combinant les deux inégalités (19) et (22), on obtient pour H assez grand et $T \geq T_0(H)$

$$m(S) < ATH^{-\frac{1}{2}}.$$

□

Divisons maintenant l'intervalle $[T, 2T]$ en $\lfloor T/2H \rfloor$ paires d'intervalles adjacents j_1, j_2, chacun de longueur H (sauf le dernier j_2 qui sera de longueur supérieure ou égale à H) et chaque j_2 se trouvant à droite du j_1 correspondant.
Dans ces conditions, pour chaque paire d'intervalle, soit $j_1 \bigcup j_2$ contient au moins zéro de Ξ, soit Ξ ne s'annule pas sur $j_1 \bigcup j_2$, donc $\Xi(t)$ est de signe constant sur ces intevalles et $j_1 \subset S$, par définition de S et $I(t)$.

Supposons que le dernier cas soit vérifié pour v intervalle. On a alors

$$vH \leq m(S) \leq ATH^{-\frac{1}{2}},$$

le lemme 5 fournissant la deuxième inégalité (on suppose donc que ses conditions de validité sont vérifiées).
Donc il y a dans $[T, 2T]$ au moins

$$\lfloor T/2H \rfloor - v > \frac{T}{H}\Big(\frac{1}{3} - \frac{A}{H^{\frac{1}{2}}}\Big) > \frac{T}{4H}$$

zéros pour H assez grand et $T \geq T_0(H)$.

Une fois H assez grand fixé, on a pour tout $T \geq 2T_0(H)$ au moins $T/(8H)$ zéros dans l'intervalle $[T/2, T]$, donc a fortiori $N_0(T) \geq T/(8H)$, ce qui prouve notre théorème.

□

4 Démonstrations des lemmes

Preuve[**du lemme 3**]

Rappel énoncé (du lemme 3)
Il existe des constantes absolues M et $A > 0$ telle que pour tout $H \geq M$, il existe une constante $T_0(H) > 0$ dépendante de H telle que pour tout $T \geq T_0(T)$ on ait

$$\int_T^{2T} |I|^2 dt \leq AHT^{\frac{1}{2}}.$$

Pour le prouver, nous utiliserons principalement de l'analyse de Fourier et des choix judicieux de paramètres.

Considérons deux fonctions F et f (on supposera f intégrable et de carré intégrable) reliées par les relations :

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iyu} dy, \qquad f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-iyu} du. \tag{23}$$

On explicitera un peu plus tard les f et F considérées (qui vérifieront toutes les hypothèses faites pour nos calculs). En intégrant F sur l'intervalle $[t, t+H]$ et en intervertissant les intégrales (ce qu'on peut faire puisque l'intervalle d'intégration est borné et f intégrable) on obtient

$$\int_{t}^{t+H} F(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{e^{iyH} - 1}{iy} e^{iyt} dy.$$

La fonctions $t \mapsto \int_{t}^{t+H} F(u) du$ est donc la transformée de Fourier de $y \mapsto f(y) \frac{e^{iyH}-1}{iy}$.
Par la formule de Plancherel, on a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{t}^{t+H} F(u) du \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(y) \right|^2 \frac{4 \sin^2(\frac{Hy}{2})}{y^2} dy.$$

Si de plus F est à valeurs réelles (ce sera le cas dans la suite), alors $\overline{f(y)} = f(-y)$ et $|f|^2$ est donc une fonction paire, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(y) \right|^2 \frac{4 \sin^2(\frac{Hy}{2})}{y^2} dy = 2 \int_{0}^{+\infty} \left| f(y) \right|^2 \frac{4 \sin^2(\frac{Hy}{2})}{y^2} dy \leq 2H^2 \int_{0}^{1/H} |f(y)|^2 dy + 8 \int_{1/H}^{\infty} \frac{|f(y)|^2}{y^2} dy$$

puisque $\sin^2(v) \leq v^2$ pour tout réel v. On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{t}^{t+H} F(u) du \right|^2 dt \leq 2H^2 \int_{0}^{1/H} |f(y)|^2 dy + 8 \int_{1/H}^{\infty} \frac{|f(y)|^2}{y^2} dy. \tag{24}$$

Pour démonter notre lemme, il faut choisir F proportionnelle à l'intégrande de I et déterminer sa transformée de Fourier inverse f. Pour cela, on part de (10). Par parité de Ξ et en développant le cos, (10) peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} e^{i\xi t} dt = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\xi} - e^{-\frac{1}{2}\xi} \psi(e^{-2\xi}).$$

Soit $\delta > 0$ et y réel. Posant $\xi = -i(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}) - y$ dans la formule précédente, et définissant

$$F(t) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}} e^{(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\delta)t}$$

et

$$f(y) := \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}i(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\delta) - \frac{1}{2}y} - e^{\frac{1}{2}i(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\delta) + \frac{1}{2}y} \psi(e^{i(\frac{1}{2}\pi - \delta) + 2y}),$$

on obtient que f et F sont intégrables et de carré intégrable (d'après la proposition 1.4), et qu'elles vérifient (23). On peut utiliser (24) puisque F est à valeurs réelles.

Comme $\left|a+b\right|^2 \leq 2(|a|^2+|b|^2)$, on a

$$\left|f(y)\right|^2 \leq e^{-y} + 2e^{y}\left|\psi(e^{i(\frac{1}{2}\pi-\delta)+2y})\right|^2.$$

D'autre part,

$$2H^2 \int\limits_0^{1/H} e^{-y}dy + 8\int\limits_{1/H}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y^2}dy = O(H)$$

lorsque H tend vers $+\infty$. Finalement, (24) nous donne

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_t^{t+H} F(u)du\right|^2 dt \leq 4H^2\int\limits_0^{1/H}\left|\psi(e^{i(\frac{1}{2}\pi-\delta)+2y})\right|^2 e^y dy$$
$$+ 16\int\limits_{1/H}^{+\infty}\frac{\left|\psi(e^{i(\frac{1}{2}\pi-\delta)+2y})\right|^2}{y^2}e^y dy + O(H)$$

où le grand $O(H)$ est valable lorsque H tend vers $+\infty$.

En faisant le changement de variable $x = e^y$ et en posant $G = e^{1/H}$, cela se réécrit

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_t^{t+H} F(u)du\right|^2 dt \leq 4H^2\int\limits_1^{G}\left|\psi(e^{i(\frac{1}{2}\pi-\delta)}x^2)\right|^2 dx$$
$$+ 16\int\limits_{G}^{+\infty}\left|\psi(e^{i(\frac{1}{2}\pi-\delta)}x^2)\right|^2\frac{dx}{\log^2(x)} + O(H) \quad (25)$$

où le grand $O(H)$ est valable lorsque H tend vers $+\infty$.

Evaluons la contribuation de chaque intégrale en fonction de H et de δ, sachant qu'on fera tendre δ vers 0 et que l'on prendra H assez grand. On a

$$\begin{aligned}\left|\psi(e^{i(\frac{1}{2}\pi-\delta)}x^2)\right|^2 &= \Big|\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x^2(\sin(\delta)+i\cos(\delta))}\Big|^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi x^2\sin(\delta)} + \sum_{n\neq m} e^{-(m^2+n^2)\pi x^2\sin(\delta)+i(m^2-n^2)\pi x^2\cos(\delta)}.\end{aligned}$$

Si δ est suffisamment petit (et $\delta > 0$), la fonction $t \mapsto e^{-2t^2\pi x^2\sin(\delta)}$ est décroissante et on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi x^2\sin(\delta)} &\leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-2t^2\pi x^2\sin(\delta)}dt\\ &= \frac{1}{2x\sqrt{2\pi\sin(\delta)}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du\\ &= O\big(x^{-1}\delta^{-\frac{1}{2}}\big)\end{aligned}$$

où le grand O est uniforme en x et valable pour δ tendant vers 0^+.

La contribution de ce terme dans les deux intégrales du membre de droite de (25) est donc

$$O\Big(H^2\int_1^G x^{-1}\delta^{-\frac12}dx\Big)+O\Big(\int_G^\infty \frac{\delta^{-\frac12}}{x\log^2(x)}dx\Big)=O\Big(H^2\log(G)\delta^{-\frac12}\Big)+O\Big(\frac{\delta^{-\frac12}}{\log(G)}\Big)$$
$$=O\Big(H\delta^{-\frac12}\Big)$$

où les grands O sont uniformes en H et valable pour δ tendant vers 0^+.

Pour la seconde somme portant sur les $m\neq n$, on a

$$\sum_{m\neq n} e^{-(m^2+n^2)\pi x^2\sin(\delta)}=\Big(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x^2\sin(\delta)}\Big)^2-\sum_{n=1}^\infty e^{-2n^2\pi x^2\sin(\delta)}$$
$$=\psi(x^2\sin(\delta))^2-\psi(2x^2\sin(\delta))$$

qui est intégrable sur $[G,+\infty[$, on peut donc intervertir les signes somme et intégrale dans la seconde intégrale de (25), et appliquant le lemme 1 à

$$G(x)=\epsilon_{m,n}\frac{e^{-(m^2+n^2)\pi x^2\sin(\delta)}}{\log^2(x)}\quad \text{et}\quad F(x)=(m^2-n^2)\pi x^2\cos(\delta),$$

(où $\epsilon_{m,n}=+1$ si $m>n$, -1 sinon), on a que F'/G est croissante et minorée par

$$2|m^2-n^2|\pi G\cos(\delta)e^{(m^2+n^2)\pi G^2\sin(\delta)}\log^2(G)$$

donc que la contribution de chaque terme est

$$\int_G^{+\infty} e^{-(m^2+n^2)\pi x^2\sin(\delta)+i(m^2-n^2)\pi x^2\cos(\delta)}\frac{dx}{\log^2(x)}=O\Big(\frac{e^{-(m^2+n^2)\pi G^2\sin(\delta)}}{|m^2-n^2|G\log^2(G)}\Big)$$
$$=O\Big(\frac{H^2e^{-(m^2+n^2)\pi\sin(\delta)}}{|m^2-n^2|}\Big)$$

où le O est uniforme en H, m et n, et est valable pour δ tendant vers 0^+.
De même pour la première intégrale de (25), en utilisant le lemme 1 avec les fonctions

$$G(x)=\epsilon_{m,n}e^{-(m^2+n^2)\pi x^2\sin(\delta)}\quad \text{et}\quad F(x)=(m^2-n^2)\pi x^2\cos(\delta),$$

on a que F'/G est croissante et minorée par

$$2|m^2-n^2|\pi\cos(\delta)e^{(m^2+n^2)\pi\sin(\delta)}$$

donc que la contribution de chaque terme est

$$H^2\int_1^G e^{-(m^2+n^2)\pi x^2\sin(\delta)+i(m^2-n^2)\pi x^2\cos(\delta)}dx=O\Big(\frac{H^2e^{-(m^2+n^2)\pi\sin(\delta)}}{|m^2-n^2|}\Big)$$

où le O est uniforme en H, m et n, et valable pour δ tendant vers 0^+.

En utilisant la majoration

$$\frac{e^{-n^2\pi\sin(\delta)}}{m^2-n^2}=\frac{1}{m+n}\frac{e^{-n^2\pi\sin(\delta)}}{m-n}\leq\frac1m\frac{1}{m-n},$$

la contribution de la somme totale devient

$$O\Big(H^2\sum_{m=2}^\infty\sum_{n=1}^{m-1}\frac{e^{-(m^2+n^2)\pi\sin(\delta)}}{m^2-n^2}\Big)=O\Big(H^2\sum_{m=2}^\infty\frac{e^{-m^2\pi\sin(\delta)}}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m-n}\Big)$$
$$=O\Big(H^2\sum_{m=2}^\infty\frac{\log(m)}{m}e^{-m^2\pi\sin(\delta)}\Big)$$
$$=O\Big(H^2\Big[\sum_{m\leq 1/\delta}\frac{\log(m)}{m}+\sum_{m>1/\delta}e^{-m^2\pi\sin(\delta)}\Big]\Big)$$

où les grands O sont uniformes en H et valables pour δ tendant vers 0^+.

Par ailleurs,

$$\sum_{m\leq 1/\delta} \frac{\log(m)}{m} = O\Big(\int_1^{1/\delta} \frac{\log(x)}{x} dx\Big) = O\Big(\log^2\big(\frac{1}{\delta}\big)\Big),$$

(lorsque δ tend vers 0^+) et

$$\begin{aligned}\sum_{m>1/\delta} e^{-m^2\pi\sin(\delta)} &\leq \sum_{m>1/\delta} e^{-m\pi\frac{\sin(\delta)}{\delta}} \\ &\leq \frac{e^{-\pi\frac{\sin(\delta)}{\delta^2}}}{1-e^{-\pi\frac{\sin(\delta)}{\delta}}} = O\Big(\log^2\big(\frac{1}{\delta}\big)\Big)\end{aligned}$$

lorsque δ tend vers 0^+, donc la contribution totale est finalement en $O\Big(H^2\log^2(1/\delta)\Big)$, uniformément en H et pour δ tendant vers 0^+. Or,

$$\lim_{\delta\to 0^+}\Big(\delta^{1/2}\log^2(1/\delta)\Big) = 0,$$

il existe donc $\delta_0(H) > 0$ tel que pour $\delta \leq \delta_0(H)$ on ait

$$\delta^{1/2}\log^2(1/\delta) \leq 1/H.$$

Dans ces conditions, on a alors $O\Big(H^2\log^2(1/\delta)\Big) = O\Big(H\delta^{-1/2}\Big)$.

Finalement, on vient de prouver que pour $\delta \leq \delta_0(H)$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_t^{t+H} F(u)du\right|^2 dt = O\Big(H\delta^{-\frac{1}{2}}\Big)$$

où le grand O est valable pour H tendant vers $+\infty$ et pour δ tendant vers 0^+ (avec la contrainte $\delta < \delta_0(H)$).

Prenant $\delta = 2/T$ avec $T \geq T_0(H)$, on trouve finalement ce qu'on cherchait, à savoir

$$\int_T^{2T} |I|^2 dt = O\big(HT^{\frac{1}{2}}\big) \tag{26}$$

lorsque H et T tendent vers $+\infty$, avec la contrainte $T > T_0(H)$.

□

Preuve[**du lemme 4**]

Rappel énoncé (du lemme 4)

Il existe une fonction Ψ *de la variable* t *(dépendante de* H *et* T*) et une constante absolue* A *telles que l'on ait*

$$J > (AH+\Psi)T^{-\frac{1}{4}}$$

avec

$$\int_T^{2T} \big|\Psi\big|^2 dt = O(T) \quad \textit{lorsque } T\to+\infty \quad (0 < H^2 < T)$$

En posant $s = \frac{1}{2} + it$ avec $T \leq t \leq 2T$, on a, par définition de $\Xi(t)$ et en utilisant (5), l'existence de A, constante absolue telle que

$$T^{\frac{1}{4}} \big|\Xi(t)\big| \frac{e^{\frac{1}{4}\pi t}}{t^2 + \frac{1}{4}} > A\big|\zeta(\frac{1}{2} + it)\big|.$$

Donc, en intégrant sur $[t, t+H]$, et en supposant $T \geq H$, il existe une constante A' telle que

$$\begin{aligned}
T^{\frac{1}{4}} J &> A' \int_t^{t+H} \big|\zeta(\frac{1}{2} + iu)\big| du \\
&> A' \bigg| \int_t^{t+H} \zeta(\frac{1}{2} + iu) du \bigg| \\
&= A' \bigg| \int_t^{t+H} \Big(\sum_{n<T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+iu}} + O\big(T^{-\frac{1}{2}}\big) \Big) du \bigg| \qquad (27) \\
&\geq A'H + A' \bigg| \int_t^{t+H} \sum_{2 \leq n < T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+iu}} du \bigg| + O\big(HT^{-\frac{1}{2}}\big) \\
&\geq A'H + A' \bigg| \sum_{2 \leq n < T} \Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+i(t+H)} \log(n)} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it} \log(n)} \Big) \bigg| + O\big(HT^{-\frac{1}{2}}\big).
\end{aligned}$$

Ici, (27) est une conséquence directe du cas particulier de la proposition 1.7 avec $X = T$. En effet, l'hypothèse $T \geq H$ nous assure que pour $u \in [t, t+H]$ on a $u \leq 3T$, donc l'hypothèse de validité de l'estimation est vérifiée et d'autre part $T \leq u$, on est bien dans le cas particulier.
On peut prendre une constante implicite valable pour tout T, t, H et u tels que $2T \geq t \geq T \geq H \geq 1$ et $u \in [t, t+H]$.

On définit Ψ de manière implicite, avec pour $T > H$

$$\Psi(t, H, T) = A' \bigg| \sum_{2 \leq n < T} \Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+i(t+H)} \log(n)} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it} \log(n)} \Big) \bigg| + O\big(HT^{-\frac{1}{2}}\big)$$

où la constante implicite est uniforme sur le domaine $T \geq H \geq 1$.
Sous l'hypothèse $T > H^2 \geq 1$, on a

$$\int_T^{2T} O\big((HT^{-\frac{1}{2}})^2\big) = O(T).$$

Il reste donc à prouver que

$$\int_T^{2T} \bigg| \sum_{2 \leq n < T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it} \log(n)} \bigg|^2 dt = O(T) \quad \text{et} \quad \int_T^{2T} \bigg| \sum_{2 \leq n < T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+i(t+H)} \log(n)} \bigg|^2 dt = O(T)$$

quand T tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned}
\bigg| \sum_{2 \leq n < T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it} \log(n)} \bigg|^2 &= \Big(\sum_{2 \leq n < T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it} \log(n)} \Big) \Big(\sum_{2 \leq n < T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-it} \log(n)} \Big) \\
&= \sum_{2 \leq n < T} \frac{1}{n \log^2(n)} + 2 \times \sum_{2 \leq m < n < T} \frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}} \log(n) \log(m)} e^{it \log(\frac{n}{m})}.
\end{aligned}$$

La première somme est convergente lorsque T tend vers $+\infty$, donc donnera un $O(T)$ en intégrant sur $[T, 2T]$ (la constante implicite étant ici absolue). Pour la deuxième somme, on trouve

$$\int_T^{2T} \sum_{2\le m<n<T} \frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}}\log(n)\log(m)} e^{it\log(\frac{n}{m})}dt = O\Big(\sum_{2\le m<n<T} \frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}}\log(n)\log(m)\log(\frac{n}{m})}\Big)$$

où la constante implicite est absolue.
Posons

$$\begin{aligned}
\Sigma &:= \sum_{2\le m<n<T} \frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}}\log(n)\log(m)\log(\frac{n}{m})},\\
\Sigma_1 &:= \sum_{2\le m<n/2<T} \frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}}\log(n)\log(m)\log(\frac{n}{m})},\\
\Sigma_2 &:= \ \Sigma - \Sigma_1.
\end{aligned}$$

Dans Σ_1, comme $m < n/2$, les $\log(n/m)$ sont minorés par une constante strictement positive indépendante de m et n, de même que les termes $\log(n)\log(m)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= O\Big(\sum_{2\le m<n/2<T} \frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}}}\Big)\\
&= O\Big(\Big[\sum_{2\le n<T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\Big]^2\Big) = O\big((T^{\frac{1}{2}})^2\big) = O(T)
\end{aligned}$$

lorsque T tend vers $+\infty$.
Dans Σ_2, posant $m = n - r$, on a $1 \le r \le n/2$, donc

$$\log\big(\frac{n}{m}\big) = -\log(1-\frac{r}{n}) > \frac{r}{n}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &\le \sum_{n<T}\sum_{r\le n/2} \frac{1}{(n(n-r))^{\frac{1}{2}}(r/n)\log(n-r)\log(n)}\\
&\le \sum_{n<T} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log(n)} \sum_{r\le n/2} \frac{1}{r(n-r)^{\frac{1}{2}}\log(n-r)}\\
&\le \sum_{n<T} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log(n)} \sum_{r\le n/2} \frac{1}{r(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}\log(\frac{n}{2})}\\
&= O\Big(\sum_{n<T} \frac{1}{\log(\frac{n}{2})} \sum_{r\le n/2} \frac{1}{r}\Big) = O\Big(\sum_{n<T} 1\Big) = O(T)
\end{aligned}$$

lorsque T tend vers $+\infty$.
On vient donc de prouver que $\Sigma = O(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$, et ceci nous assure que

$$\int_T^{2T} \Big|\sum_{2\le n<T} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}\log(n)}\Big|^2 dt = O(T)$$

lorsque T tend vers $+\infty$.
La preuve marche exactement de la même façon pour $(t + H)$ à la place de t. On en déduit

$$\int_T^{2T} |\Psi(t)|^2 dt = O(T)$$

dès que $0 < H^2 < T$ et pour T tendant vers $+\infty$.

$\square$

Références

[1] Bui H.M., Conrey B., Young M.P., E.C. - *More than* 41% *of the zeros of the zeta function are on the critical line*, Acta Arith. 150 (2011), no. 1, 35-64 (DOI 10.4064/aa150-1-3).

[2] Hardy, G.H. - *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann*, C.R. 158 (1914), 1012-14.

[3] Edwards, H.M. - *Riemann's Zeta Function*, Dover publications, inc. Mineola, New York.

[4] Ingham, A.E. - *The distribution of prime numbers*, Cambridge Univ. Press, 1932.

[5] Mangoldt, H. von - *Extrait d'un travail intitulé : ≪Sur le mémoire de Riemann relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée≫*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 13 (1896), p. 61-78.

[6] Tenenbaum, G. - *Introduction to analytic and probalistic number theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics(No. 46).

[7] Titchmarsh, E.C. - *Introduction to the theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press.

[8] Titchmarsh, E.C. - *The Theory of Functions*, Oxford University Press 1939.

[9] Titchmarsh, E.C. - *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford Science Publications.