Rapport de stage L3
irrationalité de $\zeta(3)$

4 juin 2015

Anthony POELS

Maître de stage : Frédéric JOUHET

Dates du stage : du 16/05 au 24/06

Lieu du stage : Bât. Braconnier 43 BD du 11 Novembre 1918 69622 VILLEURBANNE CEDEX

Introduction

La fonction zêta de Riemann est l'objet de nombreuses recherches en mathématiques. Plusieurs d'entre elles s'intéressent à la nature arithmétique et algébrique de certaines de ses valeurs, en particulier sur les entiers. Alors que pour les pairs positifs et les entiers négatifs, ces questions sont parfaitement résolues (pour les premiers, il s'agit de rationnels multipliés par une puissance de π et pour les seconds, il s'agit de rationnels) très peu de résultats sont connus à ce jour pour les entiers impairs supérieur ou égal à 3.

Ce que l'on conjecture s'exprime aisément : on pense que les nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \cdots$ sont algériquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En particulier, ils seraient tous transcendants. Malheureusement, les résultats démontrés sont beaucoup plus faibles. Par exemple, on ne connaît aucun impair m supérieur ou égal à 5 tel que $\zeta(m)$ soit irrationnel.

Durant mon stage, j'ai étudié la première partie de "Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal,...]" de Stéphane Fischler [1], qui présente entre autres la preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$ exposée par Apéry en 78. Pour avoir une preuve complète et détaillée, j'ai dû aller chercher dans d'autres ouvrages/articles certains résultats annexes tels que le théorème des nombres premiers, l'algorithme de Zeilberger ou le théorème de Poincaré (lié aux suites à récurrence linéaire). Concernant ce dernier théorème, j'ai essayé d'en donner une version étendue le rendant valide dans un cadre plus large. La preuve de cette extension étant assez longue et ne faisant pas l'objet premier de mon stage, je me suis borné à n'en présenter que son énoncé dans la deuxième partie de ce rapport.

1 Structure générale de la preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$

1.1 Schéma de preuve

La structure de la preuve est assez simple. On construit deux suites (u_n) et (v_n) de rationnels satisfaisant les assertions suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{La suite définie par } I_n = u_n\zeta(3) + v_n \text{ vérifie } \limsup_{m\to\infty} |I_m|^{1/m} \leq (\sqrt{2}-1)^4 \quad (1)$$

$$\text{En notant } d_n = \text{ppcm}(1, \cdots, n), \text{ on a } u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } 2d_n^3 v_n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\text{Il existe une infinité d'entiers } m \text{ tel que } I_m \neq 0 \quad (3)$$

Une fois ces constructions faites et les assertions prouvées, la conclusion suit naturellement : par l'absurde si $\zeta(3)$ était un rationnel p/q, la suite $2d_n^3 qI_n$ serait une suite d'entiers vérifiant :

$$\limsup_{m\to\infty} |2d_n^3 qI_n|^{1/m} \leq \mathrm{e}^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1 \qquad \text{(par le TNP et l'assertion (1))}$$

Donc la suite d'entiers $2d_n^3 qI_n$ convergerait vers 0 i.e stationnerait en 0, ce qui contredit l'assertion (3).

1.2 Théorème des nombres premiers (ou TNP)

Pour conclure, on utilise toutefois un théorème assez puissant : celui des nombres premiers (=TNP). Comme je n'en avais jamais lu de preuve, j'en ai étudié une en détails, celle présenté par Ingham dans *The distribution of prime numbers* [3].

Le théorème des nombres premiers peut s'énoncer de plusieurs manières. Avant cela, il nous faut introduire un certain nombre de fonctions arithmétiques. Pour la suite p désignera toujours un nombre premier.

Definition 1
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On définit les trois fonctions π, θ et ψ par :

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$$
$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$$
$$\psi(x) = \sum_{p^m\leq x} \log p$$

Le théorème des nombres premiers se résume aux trois théorèmes suivants équivalents :

Théorème 1 (des nombres premiers)

$$\pi(x) \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\log x}$$

Théorème 2 (des nombres premiers)

$$\theta(x) \overset{x \to +\infty}{\sim} x$$

Théorème 3 (des nombres premiers)

$$\psi(x) \overset{x \to +\infty}{\sim} x$$

Pour obtenir la version utilisée pour la preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$, il suffit de remarquer que :

$$\log d_n = \sum_{p^m \leq n} \log p = \psi(n)$$

D'où :

$$\frac{\log d_n}{n} = \frac{\psi(n)}{n} \overset{n \to +\infty}{\sim} 1$$

Et par continuité de l'exponentielle on trouve bien :

Théorème 4

$$d_n^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e$$

La démonstration du TNP repose sur une étude fine du comportement asymptotique de la fonction zêta de Riemann (notamment un contrôle asymptotique de son module et du module de sa dérivée sur une partie du demi-plan $\{\Re(z) \geq 1\}$ ou sur une partie du demi-plan $\{\Re(z) \geq \delta\}$ avec $\delta > 0$), diverses propriétés arithmétiques liées aux trois fonctions π, θ, ψ ainsi que l'utilisation de théorèmes généraux d'analyse complexe (notamment le théorème des résidus). Un point clef - et même équivalent au théorème des nombres premiers - est le fait que ζ n'ait pas de zéro de partie réelle égale à 1.

1.3 Suites à récurrence linéaire

Un autre résultat important nécessaire pour prouver l'assertion (1) (cela n'apparaît pas immédiatement) est le théorème de Poincaré. Ce théorème concerne le comportement asymptotique de suites à récurrence linéaire. Nous verrons en effet que les deux suites (u_n) et (v_n) suivent une certaine récurrence linéaire.

Les récurrence linéaires abordées ne sont pas à coefficients constants. Par conséquent les théorèmes relatifs aux récurrences linéaires (à coefficients constants) démontrés dans les années ultérieures à la L3 ne sont plus applicables - ou du moins faut-il les appliquer avec prudence car il demeure un certain nombre de similitudes, la première théorie englobant la seconde.

Pour essayer de faire les choses proprement, j'ai donc cherché à me constituer un cours sur la théorie générale des suites à récurrence linéaire à coefficients non constants et à trouver une preuve du théorème de Poincaré. Les résultats principaux sont exposés dans la prochaine section.

2 Récurrence linéaire

2.1 théorie générale

Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$
Soit $P_0, \cdots, P_{k-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \quad \text{avec } P_0(0) \neq 0$.
On considère l'équation :

$$(E) \qquad f(n+k) + P_{k-1}(n)f(n+k-1) + \cdots + P_0(n)f(n) = 0$$

On appelle solution de (E) toute fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ satifaisant (E) pour tout entier n et on note S l'espace des solutions.

La première des choses à remarquer est la propriété suivante :

Proposition 1
S *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension* k.

La définition qui suit introduit un outil utile lorsqu'on manit des suites à récurrence linéaire. On s'en servira une fois pour la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$. Pour ne pas alourdir ce rapport j'admettrai les quelques résultats s'y rapportant. Pour avoir les preuves complètes on pourra se référer au chapitre 5 de *Calcul des différences finies* de Guelfond [2].

Definition 2
Soit $f_1, \dots f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ des fonctions. On définit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$D[f_1, \dots, f_k](n) = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \dots & f_k(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \dots & f_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(n+k-1) & f_2(n+k-1) & \dots & f_k(n+k-1) \end{vmatrix}$$

Proposition 2
Soit $f_1, \dots, f_k \in \mathfrak{S}$. *Alors s'équivalent :*

$$\begin{array}{ll} (i) & (f_1, \dots, f_k) \text{ est une base de } \mathfrak{S} \\ (ii) & \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid D[f_1, \dots, f_k](n_0) \neq 0 \\ (iii) & D[f_1, \dots, f_k](0) \neq 0 \end{array}$$

Proposition 3
Soit $f_1, \ldots, f_k \in \mathrm{S}$. Alors pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} (i) \qquad & D[f_1, \ldots, f_k](n+1) = (-1)^k P_0(n) D[f_1, \ldots, f_k](n) \\ (ii) \qquad & D[f_1, \ldots, f_k](n) = (-1)^{kn} \Big(\prod_{j=0}^{n-1} P_0(j) \Big) D[f_1, \ldots, f_k](0) \end{aligned}$$

La théorie des suites à récurrence linéaire nous fournit deux théorèmes concernant les comportements asymptotiques des solutions dans le cas où les coefficients de la récurrence (les P_i) possèdent des limites finies en $+\infty$. L'un est donné dans la suite - il s'agit du théorème de Poincaré -, l'autre (plus fort) n'est guère utile bien qu'utilisé implicitement dans l'article de Fischler : c'est le théorème de Perron. Pour ce dernier, j'ai été incapable d'en trouver une démonstration et je n'ai pas cherché moi-même à le prouver. Je mentionnerai rapidement son énoncé après celui de Poincaré (dont on trouvera une démonstration dans le livre de Guelfond [2]).

2.2 Théorème de Poincaré - théorème de Poincaré étendu

Théorème de Poincaré (version classique)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $P_i : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (pour $0 \leq i < k$), k fonctions. On considère la récurrence linéaire d'ordre k de coefficients les P_i, c'est-à-dire la récurrence :

$$(\xi) \quad : \quad f(n+k) + P_{k-1}(n) f(n+k-1) + \cdots + P_0(n) f(n) = 0$$

On suppose que :

$$\begin{aligned} & P_i(n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a_i \in \mathbb{C} \quad (\textit{pour } 0 \leqslant i < k) \\ & P_0(n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

On pose $Q(X) = X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$ (Q est appelé polynôme carcatéristique de (ξ)).

On suppose que $i \neq j \Longrightarrow |\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ et $|\lambda_i| > 0$ (en particulier, toutes ses racines sont de multiplicité égale à 1).

Alors pour toute solution f de (ξ) non identiquement nulle, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lambda \quad \textit{et} \quad Q(\lambda) = 0 \quad (\textit{i.e } \lambda \textit{ est l'un des } \lambda_i)$$

Remarquons que le résultat de ce théorème est trivial dans le cas constant (i.e $P_i(n) = a_i \quad \forall n$), puisque l'hypothèse sur les modules implique que les racines sont distinctes et donc que les $n \mapsto \lambda_i^n$ sont une base de l'espace des solutions. Toute solution s'écrira donc comme combinaison linéaire de ces fonctions, et comme les racines sont distinctes en module, la racine de plus haut module dont le coefficient dans la combinaison linéaire est non nul (existe si f non identiquement nulle) dominera toutes les autres et le résultat suivra (le λ du théorème sera précisément cette racine de plus grand module).

L'hypothèse sur P_0 est nécessaire et s'expliquera dans la démonstration du théorème (si on autorise P_0 à être nul, on peut imaginer que les P_i soient simultanément nuls pendant k valeurs consécutives, et dans ces conditions, toute solution sera nulle à partir d'un certain rang : le quotient $f(n+1)/f(n)$ n'aura pas de sens pour n assez grand.

L'hypothèse sur les modules est nécessaire car sans elle on trouve des contre-exemples même dans le cas de récurrence linéaire à coefficients constants. Par exemple la récurrence d'ordre 2 :

$$f(n+2) - f(n) = 0$$

Son polynôme caractéristique est $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. La fonction f définie par $f(n) = 3 + (-1)^n$ est solution de cette récurrence. Or dans ce cas, $f(n+1)/f(n)$ est sans limite (cette suite possède deux valeurs d'adhérence 2 et 1/2 qui ne sont de plus pas racine du polynôme caractéristique).

Le théorème de Perron affirme pour sa part que sous les mêmes hypothèses il existe une base de solution $(f_1, \cdots, f_k)$ avec pour tout i compris entre 1 et k : $f_i(n+1)/f_i(n) \to \lambda_i$

J'en viens maintenant au "raffinement" évoqué en introduction.

Théorème de Poincaré *[Version raffinée]*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $P_i : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (pour $0 \leq i < k$), k fonctions. On considère la récurrence linéaire d'ordre k de coefficients les P_i, c'est-à-dire la récurrence :

$$(\xi) \quad : \quad f(n+k) + P_{k-1}(n) f(n+k-1) + \cdots + P_0(n) f(n) = 0$$

On suppose que :

$$P_i(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_i \in \mathbb{C} \quad (pour\ 0 \leqslant i < k) \tag{4}$$

$$P_0(n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

On pose

$$Q(X) = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_0 = \prod_{p=1}^{s}(X-\lambda_p)^{\alpha_p} \quad \textit{(polynôme caractéristique de } (\xi)\textit{)}$$

$$\beta = \max_{1\leq p\leq s}\{\alpha_p\}$$

$$\eta_i(n) = P_i(n) - a_i \quad (\ 0 \leq i < k)$$

$$m(n) = \max_{0\leq i<k}|\eta_i(n)|$$

On suppose que :

$$i \neq j \Longrightarrow |\lambda_i| \neq |\lambda_j| \quad \textit{et} \quad |\lambda_i| > 0 \tag{6}$$

$$m(n) = o\big(\frac{1}{n^\beta}\big) \quad \textit{si} \quad \beta > 1, \quad m(n) = o\big(\frac{1}{n^{\beta-1}}\big) = o(1) \quad \textit{si} \quad \beta = 1 \tag{7}$$

Alors pour toute solution f de (ξ) non identiquement nulle, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)} = \lambda \quad \textit{et} \quad Q(\lambda) = 0 \quad \textit{(i.e } \lambda \textit{ est l'un des } \lambda_i\textit{)}$$

Quelques remarques avant de continuer :
- dans le cas $\beta = 1$ on retrouve l'énoncé "classique"
- l'hypothèse sur les modules est toujours nécessaire, et le sera pour n'importe quel type d'hypothèse sur la vitesse de convergence des η_i puisque le contre-exemple évoqué précédemment (où $\eta_i \equiv 0$) fonctionne toujours (les racines étaient 1 et -1, donc distinctes mais égales en module)
- une hypothèse sur la vitesse de convergence est nécessaire, car le théorème est faux pour la récurrence linéaire d'ordre 2 et de polynôme caractéristique $(X-1)^2$:

$$f(n+2) - 2(1 - \frac{1}{(n+1)\log(n+2)})f(n+1) + f(n) = 0$$

Ce dernier contre-exemple est intéressant puisqu'à défaut de prouver si oui ou non l'hypothèse sur la vitesse de convergence est optimale, il nous informe quand même qu'on ne peut avoir un $o(1/n^{\beta-1})$, ce qu'invitait à penser le théorème "classique" et ce qui nous oblige à distinguer $\beta = 1$ de $\beta > 1$ dans le nouvel énoncé.

2.3 Propriétés des suites (u_n) et (v_n)

Dans cette partie, on définit (u_n) et (v_n) de manière "théorique" (puisque cela ne nous fournit pas de formes explicites) à l'aide d'une récurrence linéaire d'ordre 2. On verra qu'on peut déjà en déduire un certain nombre de propriétés.

On considère la récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$(\mathfrak{E}) \quad : \quad (n+1)^3 y_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)y_n + n^3 y_{n-1} = 0$$

L'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 et les suites $(u_{R,n})$ et $(v_{R,n})$ données par les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{R,0} = 1 \\ u_{R,1} = 5 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{R,0} = 0 \\ v_{R,1} = 6 \end{array} \right.$$

en constituent une base.

On montre facilement par récurrence immédiate que ces deux suites sont croissantes à termes rationnels.
Le polynôme caractéristique de $(\mathfrak{E})$ est

$$P(X) = X^2 - 34X + 1$$

qui possède deux racines distinctes en module : $(\sqrt{2}+1)^4$ et $(\sqrt{2}-1)^4$. Le théorème de Poincaré - ou du moins l'un de ses corollaires - nous donne que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{R,n})^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \\ (v_{R,n})^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \end{array} \right.$$

avec λ et μ racines de P.

Or $(u_{R,n})$ et $(v_{R,n})$ sont des suites croissantes donc supérieures à 1 pour $n \geq 1$. En particulier, pour $n \geq 1$ on a $(u_{R,n})^{1/n}, (v_{R,n})^{1/n} \geq 1$, d'où nécessairement $\lambda = \mu = (\sqrt{2}+1)^4$.

En notant :

$$\Delta_n = \left| \begin{array}{cc} v_{R,n} & v_{R,n-1} \\ u_{R,n} & u_{R,n-1} \end{array} \right|$$

on a d'après la propriété 3 (au signe près) que

$$\Delta_n = \frac{6}{n^3}$$

d'où l'on en déduit que :

$$\frac{v_{R,n}}{u_{R,n}} - \frac{v_{R,n-1}}{u_{R,n-1}} = \frac{6}{n^3 u_{R,n} u_{R,n-1}}$$

Donc la suite $\big(v_{R,n}/u_{R,n}\big)$ est strictement croissante est converge vers une limite l vérifiant :

$$u_{R,n} l - v_{R,n} = \sum_{k \geq n+1} \frac{6u_{R,n}}{k^3 u_{R,k} u_{R,k-1}}$$

La suite $\big(u_{R,n}l - v_{R,n}\big)$ est donc une solution de $(\mathfrak{E})$ convergeant vers 0 en $+\infty$. En particulier, par Poincaré :

$$\big(u_{R,n}l - v_{R,n}\big)^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta \leq 1 \qquad \text{et} \quad P(\eta) = 0$$

D'où nécessairement :

$$\big(u_{R,n}l - v_{R,n}\big)^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\sqrt{2}-1)^4$$

A ce stade, il ne reste plus qu'à démontrer que $l = \zeta(3)$ et l'assertion (2), ce qui n'est pas chose aisée sans les formes explicites des suites...

3 Explicitation des suites

3.1 $(u_{E,n})$ et $(v_{E,n})$

Definition 3

$$u_{E,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

$$v_{E,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \Big(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \Big)$$

Sous cette forme, il devient aisé de montrer que $u_{E,n} \in \mathbb{Z}$ et que $v_{E,n}/u_{E,n}$ tend vers $\zeta(3)$ en $+\infty$ puisque

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \zeta(3) \quad \text{uniformément en k}$$

Proposition 4

$$2d_n^3 v_{E,n} \in \mathbb{Z}$$

Preuve

Pour $1 \leq m \leq k \leq n$ on a :

$$\frac{\binom{n+k}{k} d_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} = \frac{\binom{n+k}{k-m} d_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}$$

$$\text{Il suffit donc de montrer que } \frac{d_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}} \text{ est un entier}$$

Soit p en nombre premier.

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\alpha} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \qquad \text{où } \alpha = \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor = \nu_p(d_n)$$

Pour $1 \leq i \leq \nu_p(m)$ on a : $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-m}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor$

Pour $\nu_p(m) < i \leq \nu_p(d_n)$, on a : $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n-m}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor + 1$

D'où :

$$\begin{aligned} \nu_p\left(\binom{n}{m}\right) &= \nu_p(n!) - \nu_p(m!) - \nu_p\big((n-m)!\big) \\ &= \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-m}{p^i} \right\rfloor \\ &\leq \sum_{i=\nu_p(m)+1}^{\nu_p(d_n)} 1 = \nu_p(d_n) - \nu_p(m) \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\begin{aligned} \nu_p\left(\frac{d_n^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}\right) &\geq 3\nu_p(d_n) - 3\nu_p(m) + 2\nu_p(m) - \nu_p(d_n) - \nu_p(d_k) \\ &\geq 0 \qquad \text{car } m \mid d_n \text{ et } d_k \mid d_n \end{aligned}$$

Donc $d_n^3/m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}$ est un entier ce qui achève la démonstration de l'assertion (2).

La dernière chose à prouver - et ce n'est pas chose facile sans outil supplémentaire - est que les suites $u_{E,n}$ et $v_{E,n}$ sont effectivement égales aux suites $u_{R,n}$ et $v_{R,n}$. Comme elles coïncident sur les deux premiers termes, il suffit de prouver que les suites $u_{E,n}$ et $v_{E,n}$ suivent la même récurrence linéaire que les deux autres. Une fois cela vérifié, la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ sera complète.

3.2 Algorithme de Zeilberger

Toute cette sous partie est directement inspirée du livre mis en ligne $A{=}B$ [5]

On considère une somme du type :

$$f(n) = \sum_k F(n,k) \tag{8}$$

où $F(n,k)$ est hypergéométrique en n et en k, c'est-à-dire que les quotients $F(n+1,k)/F(n,k)$ et $F(n,k+1)/F(n,k)$ sont tous les deux des fonctions rationnelles en n et en k.
Pour le moment, on suppose que la somme est prise sur $\mathbb{Z}$ bien que cette condition pourra être considérablement affaiblie.

L'objectif est de trouver une relation de récurrence pour $f(n)$ et pour cela on commencera par en trouver une pour la sommande $F(n,k)$ en utilisant par exemple l'agorithme de Sister Celine (présenté en détails en II.4 [5]).

Definition 4
On note N, respectivement K, l'opérateur "décalage avant" en n, respectivement en k. Autrement dit $Ng(n,k) = g(n+1,k)$ et $Kg(n,k) = g(n,k+1)$.

Sous certaines conditions explicitées dans la suite, on peut toujours trouver un polynôme en N :

$$p(n,N) = a_0(n) + \cdots + a_J(n)N^J$$

tel que :

$$p(n,N)F(n,k) = (K - \mathrm{Id})G(n,k) \quad \text{où } a_i(X) \in \mathbb{K}[X]$$
$$\text{et avec } \frac{G(n,k)}{F(n,k)} \text{ fonction rationnelle en } n \text{ et en } k$$

Autrement dit, on a une relation du type :

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n)F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \tag{9}$$

Comme les a_j sont indépendants de k, on somme sur k et on trouve (en supposant que $G(n,k) \neq 0$ uniquement sur un compact en k) :

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n)f(n+j) = 0 \tag{10}$$

Definition 5
Une fonction $F(n,k)$ est appelée terme hypergéométrique propre si elle peut être écrite sous la forme :

$$F(n,k) = P(n,k)\frac{\prod_{i=1}^{U}(a_in + b_ik + c_i)!}{\prod_{i=1}^{V}(u_in + v_ik + w_i)!}x^k$$

où :

x est une variables indéterminée

$P \in \mathbb{K}[X,Y]$

les suites $(a_i), (b_i), (c_i), (u_i), (v_i), (w_i)$ sont des suites d'entiers

$U, V \in \mathbb{N}$

Théorème 5 *Soit (Fn,k) un terme hypergéométrique propre. Alors $F(n,k)$ vérifie une récurrence non triviale de la forme (9) dans laquelle le quotient $G(n,k)/F(n,k)$ est une fonction rationnelle en n et en k.*

L'algorithme de Zeilberger (II.6 de [5]) nous fournit cette relation ainsi que la fonction G. Le quotient de G par F s'appelle le certificat. Une fois le certificat donné, il est "facile" de vérifier qu'il fournit bien la récurrence souhaitée. D'autre part, Zeilberger nous donne aussi les solutions hypergéométriques de la récurrence fournie, et donc si la fonction f est hypergéométrique (ce qui n'est souvent pas aisé à remarquer).

La sommande de la suite $(u_{E,n})$ est clairement hypergéométrique propre. On peut donc appliquer Zeilberger. On obtient le certificat :

$$A(n,k) = 4(2n+1)\big(k(2k+1) - (2n+1)^2\big)$$

Une nouvelle difficulté se pose pour la suite $(v_{E,n})$, puisque la sommande n'est pas hypergéométrique. On ne peut pas appliquer directement Zeilberger. Cependant, il doit exister d'autres algorithmes, puique dans l'article on nous donne la fonction :

$$G(n,k) = A(n,k)\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\Big(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}+\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\Big)+\frac{5(2n+1)k(-1)^{k-1}}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

3.3 Autres méthodes pour obtenir les suites...

On voit qu'à travers cette preuve le point un peu obscur et délicat est celui des deux suites mises en jeu et Apéry n'a jamais expliqué clairement la manière dont il les avait trouvées. Une piste pourrait se trouver dans un article de Van Poorten [4]. Il parvient avec des manipulations astucieuses mais simples à la formule :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}$$

Vient alors l'idée d'introduire pour $k \leq n$:

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \quad \Big(\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\zeta(3) \text{ uniformément en } k\ \Big)$$

Enfin, d'autres manipulations sur $c_{n,k}$ destinées à accélèrer la convergence (sont-elles classiques ?) fournissent $(u_{E,n})$ et $(v_{E,n})$ mais sous des formes différentes.

D'autres preuves de l'irrationalité de $\zeta(3)$ sont fondées sur des constructions différentes de ces suites, par exemple à l'aide d'intégrales triples réelles, de séries de type hypergéométrique ou encore d'intégrales complexes. Un point intéressant à remarquer est que pour différentes que sont ces constructions, il n'en demeure pas moins que les suites obtenues sont toujours les mêmes.

Conclusion

Depuis Apéry, on a été incapable de prouver l'irrationalité d'un autre $\zeta(2m+1)$ par une méthode similaire (les dénominateurs convergeants trop vite vers 0). D'autre part, certaines zones d'ombres demeurent quant à la manière dont Apéry a trouvé ces suites.
D'un point de vue personnel, j'ai trouvé ce stage intéressant. D'une part parce que l'article étudié portait sur un sujet vivant où beaucoup de choses restent à faire. D'autre part, la forme même de l'article incitait à chercher ailleurs les détails, puisque seule la structure générale de la preuves était explicitée. J'ai pu ainsi m'intéresser à des choses certes non directement liées à la problématique initiale - comme le théorème de Poincaré - mais sur lesquelles j'ai pu prendre des libertés et mener des recherches personnelles.

Références

[1] Stéphane FISCHLER - *Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal,...]*, Séminaire Bourbaki - Novembre 2002, Exposé numéro 910

[2] A.O.GUELFOND - *Calcul des différences finies*, Dunod, 1963

[3] A.E. INGHAM - *The distribution of prime numbers*, Cambridge Univ. Press, 1932

[4] A. Van Der POORTEN - *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer 1.4 (1978/ 79), 195-203

[5] D. PETKOVSEK, H.S.WILF et D.ZEILBERGER - *A=B*, 27 avril 1997, ouvrage disponible en ligne à l'adresse : http ://www.math.upenn.edu/ wilf/AeqB.html